SERIE PUBLICACIONES MISCELANEAS No. 145

MANUAL PARA ESTIMAR PARAMETROS DE SEIS MODELOS APLICADO A FENOMENOS SOCIALES, ECONOMICOS Y BIOLOGICOS

Víctor Quiroga Mag.Sc.

IICA

DIVISION DE PROCESAMIENTO DE DATOS

Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano
PIADIC

San José, Costa Rica
Abril 1977

Entre los objetivos del Convenio IICA/ROCAP (PIADIC), se destaca la preparación de manuales con metodologías, normas y procedimientos uniformes, compatible y comparables para el manejo de información agrícola de la Región.

Esta publicación es el resultado de la colaboración de la División de Procesamiento de Datos, el Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano; los costos de impresión fueron pagados por PIADIC.

Se destaca el agradecimiento al personal de la D.P.D. que colaboró en la elaboración del manual.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

CUADRO No. Página

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCION

En el manual, se desarrolla metodologías para el cálculo de coeficientes de regresión, correspondiente a los 6 modelos básicos: lineal, logarítmico, geométrico, cuadrático, raíz cuadrada y gamma. Para conseguir las soluciones se requiere unicamente un calculador pequeño, sea manual o de escritorio.

Como consecuencia del uso cada vez más frecuente de computadoras electrónicas, y sobre todo por el deseo de las oficinas sectoriales que tienen que ver con la planificación nacional y formulación de políticas, de contar con Banco de Datos o Sistemas de Información Nacional y Regional, se presenta estos 6 modelos con el propósito de incluir técnicas estadísticas para la estimación y predicción para diferentes niveles de confiabilidad. La División de Procesamiento de Datos del IICA tiene una biblioteca de programas de modelos estadísticos basado precisamente en esta metodología.

Se agradece al Programa de Información Agropecuaria del Istmo Centroamericano PIADIC, por su acertada política de incentivar la elaboración de manuales aplicable a los sistemas de información agrícola del Istmo. Al Personal de la División de Procesamiento de Datos del IICA por su colaboración permanente y tenaz.

REGRESION

1. Concepto: Es el estudio de la relación estructural entre variables causales y variables producto, es una ecuación que contiene variables controlables, aleatorias e incógnitas.

Sea la función de regresión.

$$Y = b_0 + b_1X$$

Esta ecuación, indica que la respuesta medida por la variable Y, es directamente proporcional al insumo aplicado X; en forma gráfica.

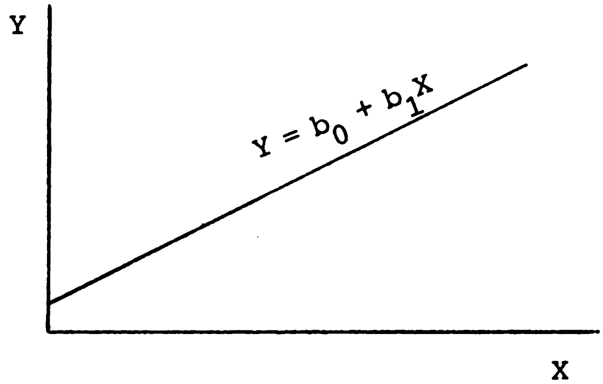

Figura 1. Regresión de Y sobre X.

Sea otra función de regresión:

$$Y = b_0 + b_1X + b_2X^2$$

Esta ecuación indica que la respuesta medida por la variable Y, no es directamente proporcional al insumo X; en forma gráfica.

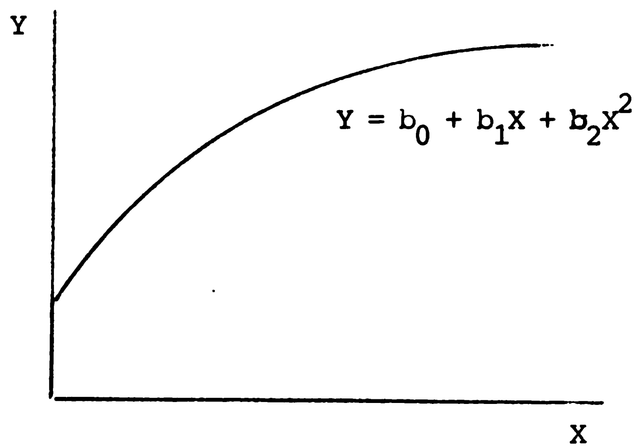

Figura 2. Regresión de Y sobre X.

2. Tipo de Relaciones: Si la función de relación es, entre una variable de respuesta y otra causal, fundamentalmente se tienen las 8 funciones que se presentan en las figuras 3 - 10.

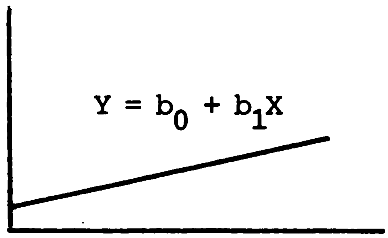

Figura 3. Regresión lineal de Y sobre X

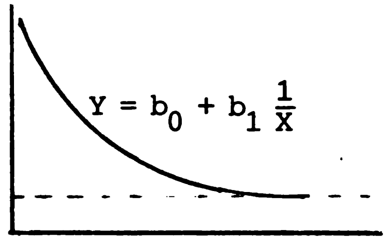

Figura 4. Regresión inversa

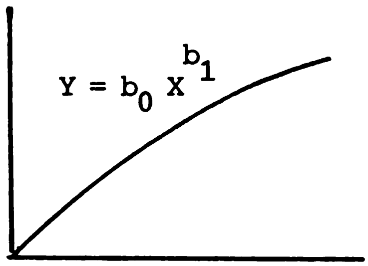

Figura 5. Regresión logarítmica

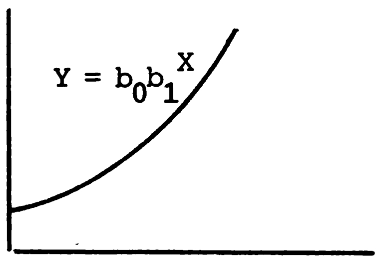

Figura 6. Regresión geométrica

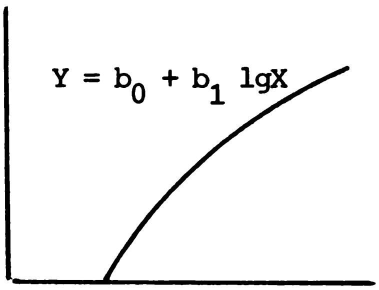

Figura 7. Regresión semilogarítmica

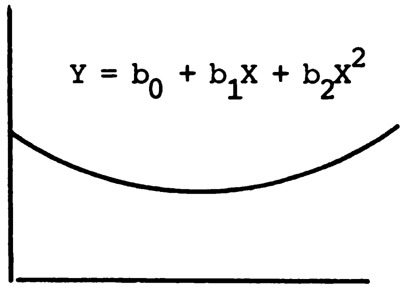

Figura 8. Regresión cuadrática

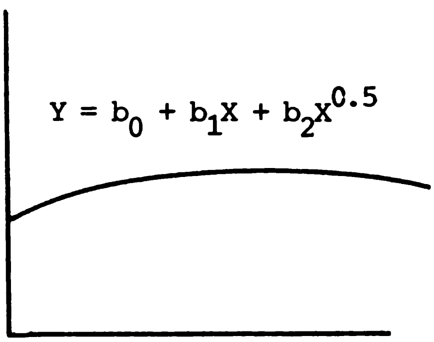

Figura 9. Regresión Raíz Cuadrada

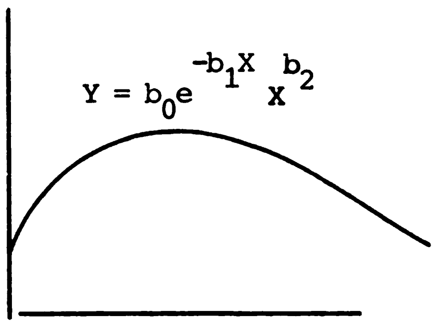

Figura 10. Regresión Gamma

3. Estimación de coeficientes de regresión. Dado n pares de observaciones dispersas en el eje X, Y de la Figura 11, es posible trazar la línea de regresión $Y = b_0 + b_1X$ que pasa por el centro de gravedad $\bar{X}$ y $\bar{Y}$.

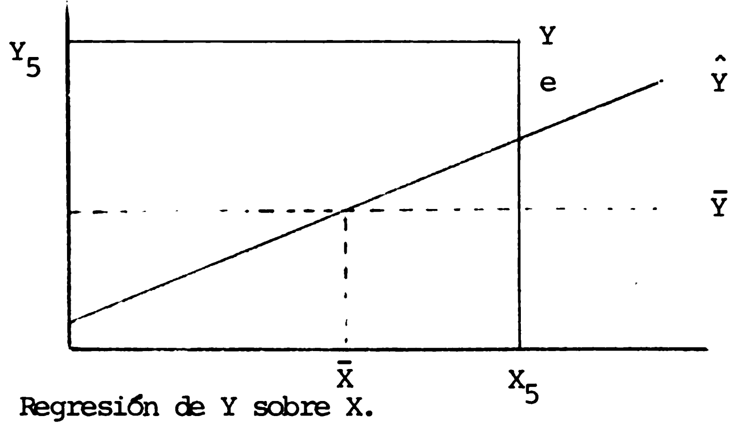

Figura 11. Regresión de Y sobre X.

En esta figura los valores estimados $\hat{Y}_i$ que están sobre la línea de regresión corresponden a los Y_i y calculados con base en la función:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X \qquad ó \qquad \hat{Y} = \bar{Y} - b_1(X - \bar{X}) \qquad |13|$$

donde:

b_0 = estimador del parámetro desconocido β_0
b_1 = estimador del parámetro desconocido β_1
$\hat{Y}$ = ordenada sobre la línea de regresión para cierto valor de X.

Si se toma la pareja de datos X_5, Y_5, y desde ella se proyecta una perpendicular al eje X, es posible definir nuevos valores e_i tal que:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Estas diferencias reciben el nombre de residuales, desvíos o errores de la línea de regresión, unas con signo positivo y otras con signo negativo dependiendo si el residual está por encima o debajo la línea de regresión. Si estos residuales se elevan al cuadrado y se suman, el resultado será directamente proporcional a la dispersión o alejamiento de los puntos Y_i con respecto a la línea de regresión: por otra parte, diferentes valores del par b_0 y b_1 generarán diferentes líneas de regresión y por tanto diferentes resultados para la suma de cuadrados de los residuales, en forma esquemática:

$$\Sigma e_i^2 = f(b_0, b_1)$$

4. Estimación por Mínimos Cuadrados. El principio de mínimos cuadrados establece que, b_0 y b_1 deben ser elegidos tal que Σe_i^2 sea tan pequeño como fuera posible; es decir, una condición necesaria es, que la derivada parcial de esta suma con respecto a b_0 y b_1 debe ser cero. Así de |14| y |13|, se obtiene:

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \Sigma (Y_i - b_0 - b_1 X)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial b_0} (\Sigma e_i^2) = -2\Sigma (Y_i - b_0 - b_1 X) = 0 \qquad |15|$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} (\Sigma e_i^2) = -2\Sigma X (Y_i - b_0 - B_1 X) = 0 \qquad |16|$$

En |16| despejar XY y transformar las variables a sus correspondientes valores corregidos por su media.

$$\Sigma XY = b_0 \Sigma X + b_1 \Sigma X^2$$

$$\Sigma (X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = b_0 \Sigma (X-\bar{X}) + b_1 \Sigma (X-\bar{X})^2 \quad ; \quad \Sigma (X - \bar{X}) = 0$$

$$b_1 = \frac{\Sigma (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\Sigma (X - \bar{X})^2} \qquad |17|$$

En la derivada |15| despejar Y, y dividir por n ambos miembros:

$$\frac{\Sigma Y}{n} = \frac{b_0 n}{n} + \frac{b_1 \ \Sigma X}{n} \quad ; \quad \frac{\Sigma Y}{n} = \bar{Y} \quad ; \quad \frac{\Sigma X}{n} = \bar{X} \qquad |18|$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 (\bar{X})$$

La relación |17|, después de una transformación sencilla toma la forma siguiente:

$$b_1 = \frac{\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n} \qquad |19|$$

ya que $\Sigma (X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n$

La relación |17| también puede expresarse así:

$$b_1 = \frac{\Sigma (X-\bar{X}) Yi}{\Sigma (X-\bar{X})^2} \quad ; \quad W_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\Sigma (X-\bar{X})^2}$$

$$b_1 = \Sigma W_i Y_i$$

Tomando varianza en ambos miembros:

$$\mathrm{Var}\ (b_1) = \Sigma W_i^2\ \mathrm{Var}(Y_i) \quad ; \quad \mathrm{Var}(Y_i) = s^2 \quad ; \quad \mathrm{Var}(b_1) = s^2_{b_1}$$

$$= \Sigma W_i^2 s^2 \quad ; \quad \Sigma W_i^2 = \frac{1}{\Sigma (X-X)^2}$$

$$s^2_{b_1} = \frac{s^2}{\Sigma (X-\bar{X})^2} \quad ; \quad s^2 = \text{CM residual}$$

Tomar varianza en ambos miembros de |18|

$$\mathrm{Var}\ (b_0) = \mathrm{Var}(\bar{Y}) + \bar{X}^2\ \mathrm{Var}(b_1)$$

$$= \frac{s^2}{n} + \frac{X^2 \ .\ s^2}{\Sigma (X-\bar{X})^2}$$

$$s^2_{b_0} = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}}{\Sigma (X-\bar{X})^2} \right)$$

5. Prueba de Hipótesis del coeficiente b_1. Se plantea la hipótesis nula y se prueba con la distribución de 't de student'

$$H_0 \ : \ \beta_1 = 0$$

$$H_A \ : \ \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}}$$

6. Análisis de Varianza. La variación total se parte en 2 componentes sumables, la debida a regresión y la debida a los residuales. Las relaciones se consiguen con una transformación aritmética de la definición |14|.

$$e = Y - \hat{Y}$$
$$= Y - \hat{Y} + \bar{Y} - \bar{Y}$$
$$\Sigma e^2 = \Sigma |(Y - \bar{Y}) - (\hat{Y} - \bar{Y})|^2$$
$$= \Sigma(Y - \bar{Y})^2 + \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 - 2\Sigma(Y - \bar{Y})(\hat{Y} - \bar{Y})$$

De |13|y|17|:

$$= \Sigma(Y - \bar{Y})^2 + \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 - 2\Sigma(Y - \bar{Y})^2$$

$$\Sigma(Y-\hat{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 - \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

$$\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 + \Sigma(Y - Y)^2 \qquad |20|$$

En la anterior expresión, el lado izquierdo recibe el nombre de suma de cuadrados total; el primer término del lado derecho de la igualdad recibe el nombre de suma de cuadrados debido a regresión y el último, suma de cuadrados residual o desvíos de la regresión. Con estos resultados se completa el cuadro de análisis de varianza.

Cuadro 1. Análisis de varianza de la regresión

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	$\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	p - 1	SCR/GL	CMR/CMR
Residual	$\Sigma(Y - \hat{Y})^2$	n - p	SCR/GL	
Total	$\Sigma(Y - \bar{Y})^2$	n - 1		

$\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = (b_1)(\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n)$; p = No. de parámetros estimados.

7. Bondad de ajuste. Es el cociente de la suma de cuadrados de regresión y el total expresado en porcentaje.

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} \cdot 100$$

Ejemplo 1. Regresión del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión hasta el sexto día, con base en el modelo estadístico lineal.

Modelo: $Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon$

Donde: Y = tamaño de larva

X = días de eclosión

ε = error

Cuadro 2. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo estadístico.

	X	Y	(X . Y)	X^2	Y^2
	1	8	8	1	64
	2	10	20	4	100
	3	9	27	9	81
	4	8	32	16	64
	5	7	35	25	49
	6	6	36	36	36
	7	6	42	49	36
	8	3	24	64	9
	9	2	18	81	4
Σ:	45	59	242	285	443
$\bar{X}$:	5	6.5555	26.288	31.666	49.22

Cálculo de coeficientes de la regresión lineal (estimadores)

$$b_1 = \frac{\Sigma XY - (\Sigma X).(\Sigma Y)/n}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}$$

$$b_1 = \frac{242 - (45)(59)/9}{285 - (45)^2/9} = \frac{242 - 245}{285 - 225} = \frac{-53}{60} =$$

$$b_1 = -0.883333$$

$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}$

$b_0 = 6.555555 - (-0.883333)(5) = 10.972222$

Análisis de varianza:

S.C. Regresión $= b_1(\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n) = 46.816667$

S.C. Total $= \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n = 56.222222$

S.C. Residual = S.C. Regresión - S.C. total = 9.405555

Cuadro 3. Análisis de varianza de la regresión lineal

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	46.816667	1	48.816667	34.8428
Residual	9.405555	7	1.343651	
Total	56.222222	8		

NOTA: El anterior cuadro puede construirse también utilizando las observaciones corregidas por su media; es decir, utilizando las fórmulas definición correspondientes a la partición de la variación total. En este caso, se requiere construir la tabla de predicciones conforme a nuestro modelo estadístico resuelto.

$$\hat{Y} = 10.9722 - 0.8833\ (X)$$

$$\text{Residual} = \hat{Y} - Y$$

Cuadro 4. Valores estimados con los coeficientes calculados y diferencias cuadráticas.

$\hat{Y}$	$(\hat{Y} - Y)$	$(\hat{Y} - Y)^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
10.0888	-2.0888	4.363453	12.484439	2.086421
9.2055	0.7944	.631141	7.022474	11.864201
8.3222	0.6777	.459382	3.121114	5.975311
7.4388	0.5611	.314845	0.780278	2.086421
6.5555	0.4444	.197530	0.000000	0.197531
5.6722	0.3277	.107438	0.780276	0.308641
4.7888	1.2111	1.466790	3.121111	0.308641
3.9055	-0.9055	.820030	7.022497	12.641971
3.0222	1.0222	1.044938	12.484439	20.753081
		9.405555	46.816666	56.222222

$$\text{S.C. Regresión} = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 46.816667$$
$$\text{S.C. Residual} = \Sigma(Y - \hat{Y})^2 = 9.405555$$
$$\text{S.C. Total} = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 56.222222$$

Cuadro 5. Análisis de varianza de la regresión

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	46.816667	1	46.8	34.84
Residual	9.405555	7	1.3	
Total	56.222222	8		

Coeficiente R^2:

$$R^2 = \frac{\text{S.C. Regresión}}{\text{S.C. total}} \cdot 100 = \frac{46.816667}{56.222222} \cdot 100$$

$$R^2 = 83.27$$

Error estandar del coeficiente b_1

$$s_{b_1} = \frac{s}{\sqrt{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}} = 0.149647$$

Prueba de 't de student'

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_A : \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{-.883333}{.149647}$$

$t = -5.9027$

Este resultado es altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis nula. Como es de esperar, se cumple: $t^2 = F$; es decir, los valores de F con 1 grado de libertad siempre son iguales a la correspondiente t al cuadrado, así:

$$(5.9027)^2 = 34.84$$
$$t^2 = F$$

Representación gráfica

Para trazar la línea de regresión, se utilizan los valores de X_i, Y_i, $\hat{Y}_i$ en la escala original. Así:

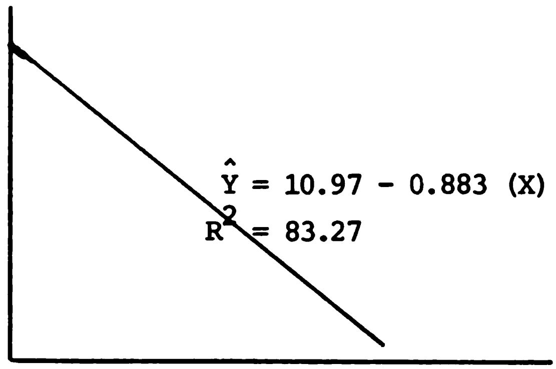

Figura 12. Regresión lineal del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión.

Límites de confianza (Banda de confianza)

Para poner límites de confianza a los valores estimados $\hat{Y}_i$, se utiliza el error standar del estimado ($s_{\hat{Y}_i}$).

$$s_{\hat{Y}_i} = s.\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}}$$

$$s_{\hat{Y}_1} = 1.15916\ \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{60}} = 0.7124616$$

Donde: s^2 = C.M. error

$(X_i - \bar{X})^2$ = desviación cuadrática de c/X_i

$\Sigma(X_i - \bar{X})^2$ = suma de desviaciones

Con la anterior expresión algebraica, se define los límites superior e inferior de confianza. Así:

$$\text{Prob. } \{\hat{Y}_i - (s_{\hat{Y}_i}).(t) < Y_i < \hat{Y}_i + (s_{\hat{Y}_i}).(t)\} = 1.0 - \alpha$$

La banda de confianza, varía conforme los valores asignados a t; es decir, depende del nivel que usualmente puede ser: = 0.05, 0.10, 0.20, 0.30 etc.

Cuadro 6. Cálculo de límites de confianza para $\alpha = 0.05$ y $t = 2.365$ de la tabla de 't de student'

$\hat{Y}_i$	$(X-\bar{X})^2$	$s_{\hat{Y}_i}$	$(t)(s_{\hat{Y}_i})$	$\hat{Y}_i - s_{\hat{Y}_i}$	$\hat{Y}_i + s_{\hat{Y}_i}$
10.0888	16	0.712461	1.684970	8.40	11.77
9.2055	9	0.592319	1.400834	7.80	10.61
8.3222	4	0.488744	1.155880	7.17	9.48
7.4388	1	0.414353	0.979945	6.46	8.42
6.5555	0	0.386386	0.913803	5.64	7.47
5.6722	1	0.414353	0.979945	4.69	6.65
4.7888	4	0.488744	1.155880	3.63	5.94
3.9055	9	0.592319	1.400834	2.50	5.31
3.0222	16	0.712461	1.684970	1.34	4.71
	60				

Representación gráfica de los valores estimados $\hat{Y}_i$ y sus bandas de confianza. En escala decimal X_i en la abcisa y Y_i ordenadas.

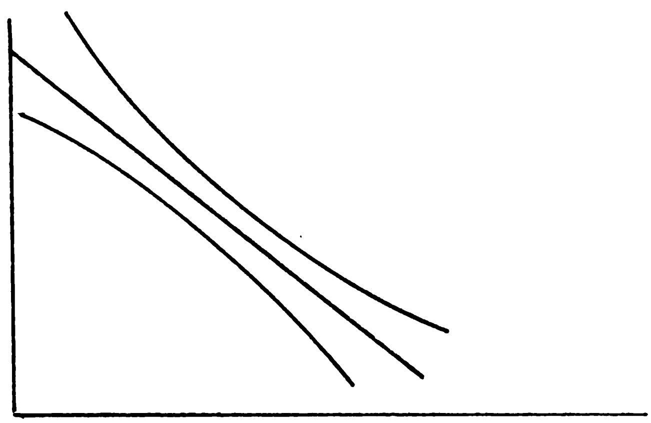

Figura 13. Límites de confianza de la regresión para $\hat{Y}_i$

Ejemplo 2. Ejemplo de regresión entre dos variables sujeto al modelo estadístico de crecimiento geométrico.

Modelo estadístico:

$$Y = b_0 b_1^X e$$

Donde: Y = tamaño de larva
X = días de eclosión
ε = error

Modelo estadístico transformado:

$$Y^* = b_0^* + b_1^* X + \varepsilon$$

Cuadro 7. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo transformado, los datos fueron transformados por logarítmos naturales o neperianos.

	X	Y	X^2	Y*	X . Y*	Y^{*2}
	1	8	1	2.07944	2.07944	4.32408
	2	10	4	2.30259	4.6052	5.30190
	3	9	9	2.19722	6.5917	4.82780
	4	8	16	2.07944	8.3178	4.32408
	5	7	25	1.94591	9.7296	3.78657
	6	5	36	1.79176	10.7506	3.21040
	7	6	49	1.79176	12.5423	3.21040
	8	3	64	1.09861	8.7889	1.20695
	9	2	81	0.69315	6.2383	0.48045
Σ:	45	59	285	15.97988	69.6438	30.67263
$\bar{X}$:	5	6.5555	26.28	1.77554	7.7383	3.40807

Cálculo de coeficientes:

$$b_1^* = \frac{69.6438 - (45)(15.97988)/9}{285 - (45)^2/9} = \frac{-10.26}{60.00} = -0.170928$$

$$b_1^* = 0.170928$$

$$b_0^* = \bar{Y}^* - (b_1^*)(\bar{X})$$

$$b_0^* = 1.77554 - (-0.170928)(5) = 2.63018$$

Cuadro 8. Análisis de varianza de la regresión geométrica, corresponde al cálculo aritmético de la metodología de hipótesis (fórmulas de trabajo).

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	1.75299	1	1.75299	22.4466
Residual	0.54667	7	0.07809	
Total	2.29966	8		

S.C total $= \Sigma Y^{*2} - (\Sigma Y^*)^2/9 = 2.29966$

S.C. Regresión $= b_1^* \ (\Sigma XY^* - (\Sigma X)(\Sigma Y^*)/9) = 1.75299$

S.C. Residual = S.C. total - S.C. regresión = 0.54667

<u>Coeficiente R^2</u>

$$R^2 = \frac{\text{S.C. Regresión}}{\text{S. C. total}} \cdot 100 = \frac{1.75299}{2.29966} \cdot 100$$

$$R^2 = 76.23$$

<u>Error estandar del coeficiente</u> b_1

$$s_{b_1} = \frac{s}{\sqrt{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}} = 0.036078$$

<u>Prueba de 't de student'</u>

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_A : \beta_1 \neq 0$

$$t = \frac{b_1^*}{s_{b_1}} = -\frac{0.170928}{0.036078} = -4.73779$$

El resultado es altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis nula.

Decisión: Se rechaza la hipótesis nula, por estar frente a un resultado altamente significativo.

Representación gráfica

En el eje X se definen los días en escala decimal; mientras que en el eje Y se definen los valores de la respuesta en escala de logaritmos neperianos, así:

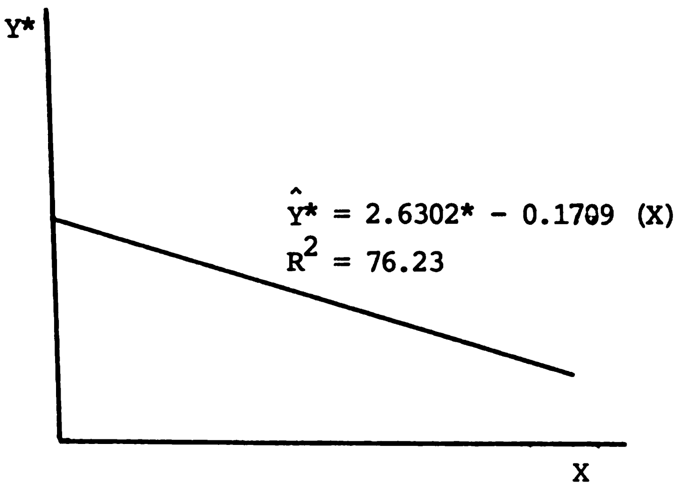

Figura 14. Regresión geométrica del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión.

También es frecuente representar los valores estimados utilizando la escala decimal tanto en X como en Y; para ello se transforma los coeficientes logarítmicos a escala decimal mediante sus antilogarítmos y se define el modelo estadístico.

$$b_1^* = -0.170928, \text{antilogarítmo } b_1 = 0.84288$$

$$b_0^* = 2.63018, \text{ antilogarítmo } b_0 = 13.876333$$

Luego:

$$\hat{Y} = 13.87633\ (0.84288)^X$$

Reemplazando X por sus valores: 1, 2, 3, 4, 5 se obtiene los diferentes estimados (Y) que sirven para trazar la curva de crecimiento.

Cuadro 9. Cálculo de los límites de confianza para $\alpha = 0.05$ y $t = 2.365$ de la tabla 't de student' para función geométrica.

$\hat{Y}^*_i$	$(\hat{Y}-Y)^*$	$(X-\bar{X})^2$	$s_{\hat{Y}_i}$	$s_{\hat{Y}_i}.t$	L.I*	L.S*
2.4592	-0.3798	16	0.1717	0.4062	2.0530	2.8654
2.2883	0.0143	9	0.1428	0.3377	1.9506	2.6260
2.1174	0.0798	4	0.1178	0.2787	1.8387	2.3961
1.9465	0.1330	1	0.0998	0.2362	1.7103	2.1827
1.7755	0.1704	0	0.0931	0.2203	1.5552	1.9958
1.6046	0.1871	1	0.0998	0.2362	1.3685	1.8405
1.4337	0.3581	4	0.1178	0.2787	1.1550	1.7124
1.2627	-0.1641	9	0.1428	0.3377	0.9250	1.6004
1.0918	-0.3987	16	0.1717	0.4062	0.6856	1.4980
		60				

Límites de confianza:

$$s_{\hat{Y}_i} = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_i) - \bar{X})^2}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}}$$

$$s_{\hat{Y}_1} = 0.27945\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{60}} = 0.1717$$

Representación gráfica de las bandas de confianza para función geométrica

Si la función es $Y^* = b_0^* + b_1^*X + \varepsilon$, se utilizan los datos del cuadro 9 en escala logarítmica ($Y^*_1 \pm T.s_{\hat{Y}_i}$) para construir la Figura 15.

Si la función es $Y = b_0.b_1^X$; se utilizan los datos del cuadro 9, en escala decimal (antilogarítmos) para construir la figura 16.

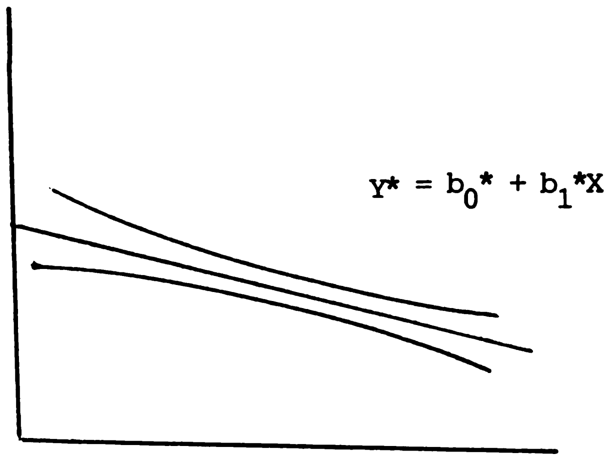

Figura 15. Límites de confianza para Y_i^* a diferentes niveles de X

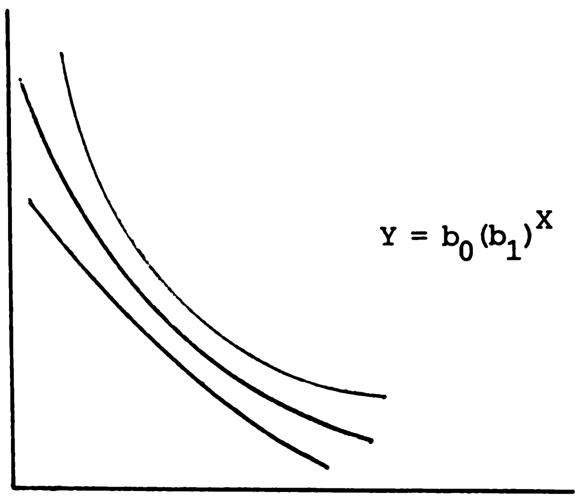

Figura 16. Límites de confianza para Y_i a diferentes niveles de X

Ejemplo 3. Regresión del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión con base en el modelo estadístico.

Modelo estadístico:

$$Y = b_0 X^{b_1} \varepsilon$$

Cuadro 10. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo transformado, los datos fueron transformados por logarítmos naturales o neperianos.

	X	Y	X*	Y*	X*Y*	X^{*2}	Y^{*2}
	1	8	0.00000	2.07944	0.00000	0.00000	4.32408
	2	10	0.69315	2.30259	1.59603	0.48045	5.30190
	3	9	1.09861	2.19722	2.41390	1.20695	4.82780
	4	8	1.38629	2.07944	2.88272	1.92181	4.32408
	5	7	1.60944	1.94591	3.13182	2.59029	3.78657
	6	6	1.79176	1.79176	3.21040	3.21040	3.21040
	7	6	1.94591	1.79176	3.48660	3.78657	3.21040
	8	3	2.07944	1.09861	2.28450	4.32408	1.20695
	9	2	2.19722	0.69315	1.52300	4.82780	0.48045
Σ:	45	59	12.80182	15.97988	20.52897	22.34835	30.67263
$\bar{X}$:	5	6.55	1.42242	1.77554	2.28100	2.48315	3.40807

Cálculo de los coeficientes de regresión (estimadores)

$$b_1 = \frac{\Sigma X^* \Sigma Y^* - (\Sigma X^*) \,.\, (\Sigma Y^*)/n}{\Sigma X^{*2} - (\Sigma X^*)^2/n}$$

$$b_1 = \frac{20.52897 - (12.80182)(15.97988)/9}{22.34835 - (12.80182)^2/9} = \frac{-2.2012202}{4.138728}$$

$$b_1 = -0.531855$$

$b_0^* = \bar{Y}^* - b_1\bar{X}^*$

$b_0^* = 1.77554 - (0.531855)(1.42242)$

$b_0^* = 2.532061$

Cuadro 11. Análisis de varianza de la regresión logarítmica. Corresponde al cálculo aritmético de la metodología de hipótesis; (fórmulas de trabajo).

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	1.17074	1	1.17074	7.259
Residual	1.12892	7	0.16122	
Total	2.29966	8		

S.C. Total $= \Sigma Y^{*2} - (\Sigma Y^*)^2/9 = 2.29966$

S.C. Regresión $= b_1 \Sigma XY^* - (\Sigma X)(\Sigma Y^*) = 1.17074$

S.C. Residual $= \Sigma(Y^* - \hat{Y}^*) = 1.12892$

Coeficiente R^2:

$$R^2 = \frac{\text{S.C. de Regresión}}{\text{S.C. del total}} \cdot 100 = \frac{1.17074}{2.29466} \cdot 100$$

$$R^2 = 50.91$$

Error estandar del coeficiente b_1

$$s_{b_1} = \frac{s}{\sqrt{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/9}} = 0.1974019$$

Prueba de 't de student'

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_A : \beta_1 \neq 0$

$$t = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{-0.531855}{0.197401} = -2.694$$

Este resusltado es altamente significativo e induce a rechazar la hipótesis nula.

Representación gráfica

Para trazar la curva de regresión, se utilizan los valores de X_i y $\hat{Y}_i$ en la escala original; es decir, se debe conseguir los antilogarítmos de Y^*_i.

Cuadro 12. Logarítmos y antilogarítmos de los estimados

X_i	$\hat{Y}_i^*$	Antilog. = $\hat{Y}_i$
1	2.532075	12.58
2	2.163417	8.70
3	1.947766	7.01
4	1.794759	6.02
5	1.676078	5.35
6	1.579108	4.85
7	1.497121	4.47
8	1.426101	4.16
9	1.363457	3.91

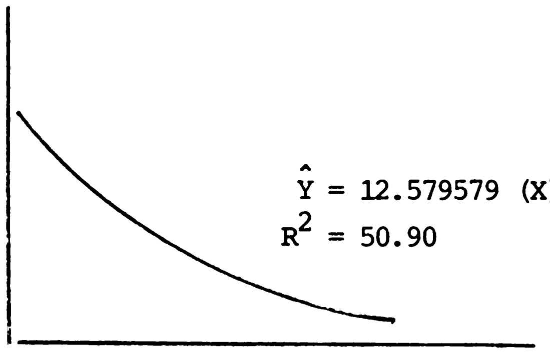

Figura 17. Regresión del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión

También es posible una representación gráfica con las escalas X y Y en logarítmos naturales.

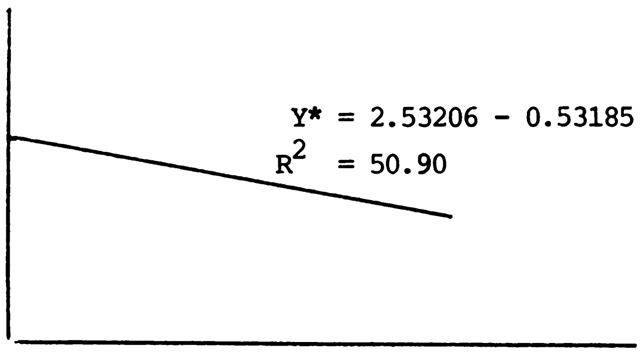

Figura 18. Regresión del peso de larvas en escala logarítmica

Límites de confianza:

Se procede en forma similar al ejemplo 1 y 2, pero, con la precaución de utilizar la ecuación:

$$Y_i^* = b_0^* + b_1 X_i^* + \varepsilon$$

$$s_{\hat{Y}_i} = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\Sigma(X^* - \bar{X}^*)^2}}$$

$$s_{\hat{Y}_i} = 0.40159\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2.023279}{4.138687}} = 0.311066$$

Cuadro 13, Cálculo de límites de confianza para $\alpha = 0.05$ y $t = 2.365$ de la tabla de 't de student'

$\hat{Y}_i^*$	$(\hat{Y}^* - Y^*)$	$(X^* - \bar{X}^*)^2$	$s_{\hat{Y}_i}$	$s_{\hat{Y}_i}\ t$	L.I	L.S
2.5321	-0.4526	2.023279	0.311066	0.735670	1.7973	3.267670
2.1634	0.1392	0.531835	0.196580	0.464912	1.6984	2.628312
1.9478	0.2494	0.104853	0.14834	0.350828	1.5969	2.298628
1.7947	0.2847	0.001300	0.134052	0.317034	1.4776	2.111734
1.6761	0.2698	0.034976	0.138861	0.328406	1.3476	2.004506
1.5791	0.2126	0.136412	0.152430	0.360498	1.2186	1.939598
1.4971	0.2946	0.274942	0.169110	0.399945	1.0971	1.897045
1.4261	-0.3275	0.431675	0.186890	0.440809	0.9852	1.866909
1.3634	-0.6303	0.600315	0.203254	0.480696	0.8827	1.844079

Representación gráfica de las bandas de confianza para función logarítmica

Puede dar origen a 2 figuras o 2 formas de representación, dependiendo de la escala utilizada; es decir, considrando las 2 formas del modelo logarítmico.

a) $Y_i^* = b_0^* + b_1 X_i^*$

b) $Y_i = b_0 X^{b_1}$

Proceder como en el ejemplo 2.

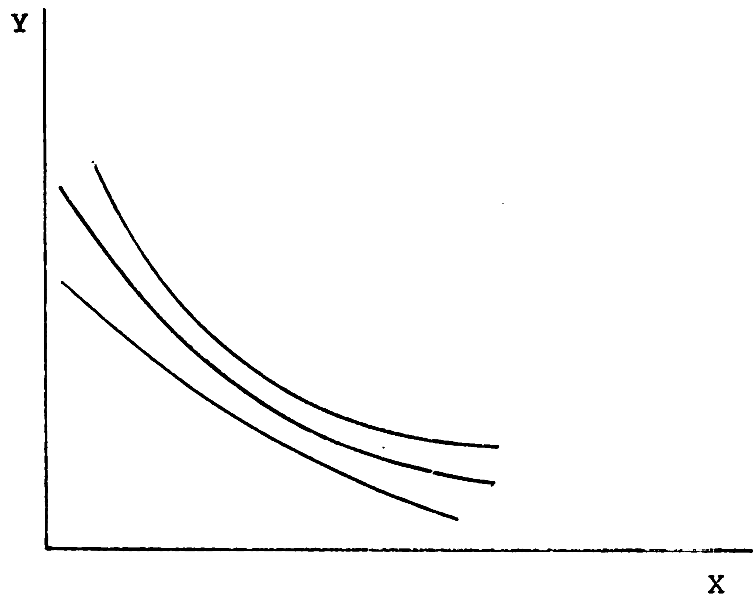

Figura 19. Regresión logarítmica de Y sobre X en escala decimal

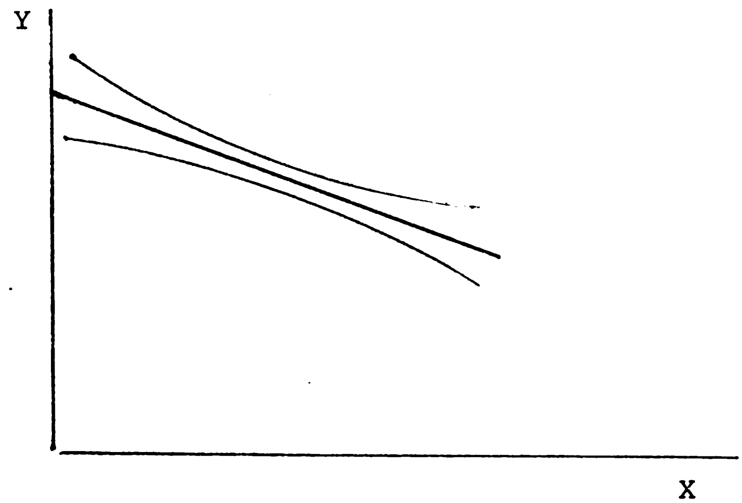

Figura 20. Regresión logarítmica de Y sobre X en escala ln

Ejemplo 4. Regresión entre dos variables sujeto al modelo estadístico de segundo orden (cuadrático).

Modelo estadístico:

$$Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \varepsilon$$

Cuadro 14. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo estadístico.

	X	Y	X^2	X^3	X^4	$X \cdot Y$	X^2Y	Y^2
	1	8	1	1	1	8	8	64
	2	10	4	8	16	20	40	100
	3	9	9	27	81	27	81	81
	4	8	16	64	256	32	128	64
	5	7	25	125	625	35	175	49
	6	6	36	216	1296	36	216	36
	7	6	49	343	2401	42	294	36
	8	3	64	512	4096	24	192	9
	9	2	81	729	6561	18	162	4
Σ:	45	59	285	2025	15333	242	1296	443
$\bar{X}$:	5	6.55	31.66	225	1703.66	26.288	141	49.22

$$b_1 = \frac{(\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)/n)\cdot(X^4-(\Sigma X^2)^2/n)-(\Sigma X^2Y-(\Sigma X^2)\cdot(\Sigma Y)/n)\cdot(\Sigma X^3- X)(\Sigma X^2)/n)}{(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/n)\ .\ (\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2/n)\ -\ (\Sigma X^3-(\Sigma X)(\Sigma X^2)/n)^2}$$

$$b_1 = \frac{(242-(45)(59)/9)\cdot(15333-(285)^2/9)-(1296-(285)(59)/9)\cdot(2025-(45)(285)/9)}{(285-(45)^2/9)\cdot(15333-(285)^2/9)\ -\ (2025-(45)(285)/9)^2}$$

$$b_1 = \frac{(-53)(6308)\ -\ (-572.3333)(600}{(60)(6308)\ -\ (600)^2} = \frac{9075.9998}{18480}$$

$$b_1 = 0.4911255$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/n).(\Sigma X^2Y-(\Sigma X^2)(\Sigma Y)/n)-(\Sigma X^3-(\Sigma X)(\Sigma X^2)/n).(\Sigma XY-(\Sigma X).(\Sigma Y)/n)}{(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/n).(\Sigma X^4-(\Sigma X^2)^2/n)\ -\ (\Sigma X^3-(\Sigma X).(\Sigma X^2)/n)^2}$$

$$b_2 = \frac{(285-(45)^2/9)(1296-(285)(59)/9)\ -\ (2025-(45)(285)/9)(242-(45)(59)/9)}{(285-(45)^2/9)(15333-(285)^2/9)-(2025-(45)(285)/9)^2}$$

$$b_2 = \frac{(60)(-572.3333)\div\ (600)(-53)}{(60)(6308)-(600)^2} = \frac{-2539.9998}{18480} = 0.13744589$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1X - b_2X^2$$

$$b_0 = 6.555555 - 0.4911255(5) - (-0.13744589)(31.666666)$$

$$b_0 = 8.452381$$

Cuadro 15. Análisis de varianza de la regresión de segundo orden (cuadrática), que corresponde al cálculo aritmético de la metodología de hipótesis (fórmulas de trabajo)

F.V.	S.C.	G.L.	CM.	F
Regresión	$b_1(\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)/n)+b_2(\Sigma X^2Y-(\Sigma X^2)/(\Sigma Y)/n)$	2	SCR/GL	CMR/CME
Residual	Por diferencia	6	SCE/GL	
Total	$\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n$			

Reemplazando valores tenemos

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	56.6352	2	26.317605	44.02
Residual	3.5870	6	.597835	
Total	56.2222	8		

Decisión: Se rechaza la hipótesis nula, por estar frente a un resultado altamente significativo (F = 82.49836).

<u>Coeficiente R^2:</u>

$$R^2 = \frac{\text{S.C. Regresión}}{\text{S.C. Total}} \cdot 100$$

$$R^2 = \frac{52.63}{56.22} \cdot 100 = 93.62$$

Errores estándar de los coeficientes b_1, b_2.

$$s_{b_1} = s \sqrt{\frac{\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2/9}{\text{Denominador } b_1}} = (0.7731982) \cdot \left(\sqrt{\frac{6308}{18480}}\right) = 0.451737$$

$$s_{b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/9}{\text{Denominador } b_1}} = (0.7731982) \cdot \left(\sqrt{\frac{60}{18480}}\right) = 0.0440571$$

$$s_{b_1 b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma X^3 - (\Sigma X)(\Sigma X^2)/9}{\text{Denominador } b_1}} = (0.7731982) \cdot \left(\sqrt{\frac{600}{18480}}\right) = 0.1393206$$

$s_{b_1 b_2}$ es la raíz cuadrada de la covarianza entre b_1 y b_2.

a) $H_0 : \beta_1 = 0$ b) $\beta_2 = 0$

$H_A : \beta_1 \neq 0$ $\beta_2 \neq 0$

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} = \frac{0.4911255}{0.451737} = 1.087$$

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{s_{b_2}} = \frac{-0.137445}{0.044057} = -3.12$$

El efecto lineal (b_1) no es significativo, pero en cambio, el efecto cuadrático (b_2) es significativo, la respuesta sigue definitivamente el modelo cuadrático.

Punto estacionario donde se presenta el máximo o mínimo:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$$

$$\hat{X} = \frac{-b_1}{2b_2} = \frac{-(-0.73)}{2(0.27)} = 1.37$$

Representación gráfica:

Para trazar la parábola, se utilizan los valores X_i y los Y_i estimados con base en los coeficientes del modelo.

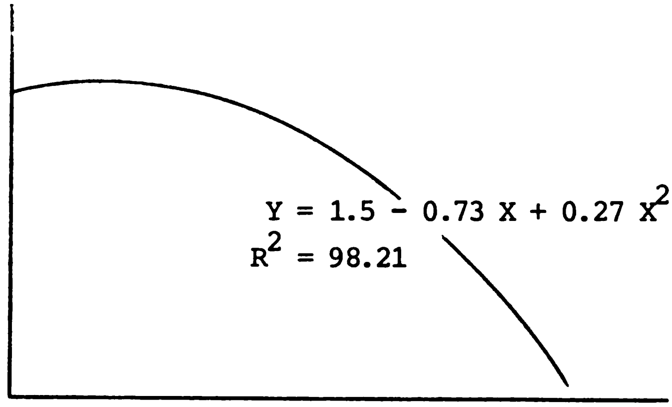

Figura 21. Regresión cuadrática del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión.

$$s^2_{\hat{Y}_1} = \frac{s^2}{n} + Var(b_1).(X-\bar{X})^2 + Var(b_2)(X^2-\bar{X}^2)^2 + 2\ Covar(b_1b_2)(X-\bar{X})(X^2 - \bar{X}^2)$$

$$= \frac{0.597835}{9} + (.204066)(16) + (.001941)(940.4444) + 2(.01941)(-123.6666)$$

$$= 0.3562 \qquad ; \qquad Var(b_1) = (s_{b_1})^2$$

Cuadro 16. Desviaciones cuadráticas

	$(X-\bar{X})^2$	$(X^2-\bar{X}^2)^2$	$(X-\bar{X})(X^2-\bar{X}^2)$	$(X-\bar{X})$	$(X^2-\bar{X}^2)$
	16	940.4444	-123.6666	-4	-30.6666
	9	765.4444	- 82.9999	-3	-27.6666
	4	513.7777	- 45.3333	-2	-22.6666
	1	245.4444	- 15.6666	-1	-15.6666
	0	44.4444	0.0000	0	- 6.6666
	1	18.7777	4.3333	1	4.3333
	4	300.4444	34.6666	2	17.3333
	9	1045.4444	96.9999	3	32.3333
	16	2433.9997	197.3333	4	49.3333
Σ:	60	6307.9997	65.3333	0	0.0000

Cuadro 17. Cálculo de los límites de confianza

$\hat{Y}_i$	$(\hat{Y}_i - Y)$	$s_{\hat{Y}_i}$	$s_{\hat{Y}_i}\ t$	L.I	L.S
8.80606	-0.80606	0.59678	1.46032	7.34	10.34
8.88484	1.11515	0.40827	0.99906	7.88	9.88
8.68874	0.31125	0.34654	0.84799	7.84	9.54
8.21774	-0.21775	0.37245	0.91139	7.31	9.13
7.47186	-0.47186	0.39075	0.95618	6.51	8.43
6.45108	-0.45108	0.37245	0.91139	5.54	3.36
8.15541	0.84458	0.34654	0.84800	4.31	6.00
3.58484	-0.58584	0.40827	0.99906	2.58	4.58
1.73939	0.26060	0.62846	1.53784	0.20	3.28

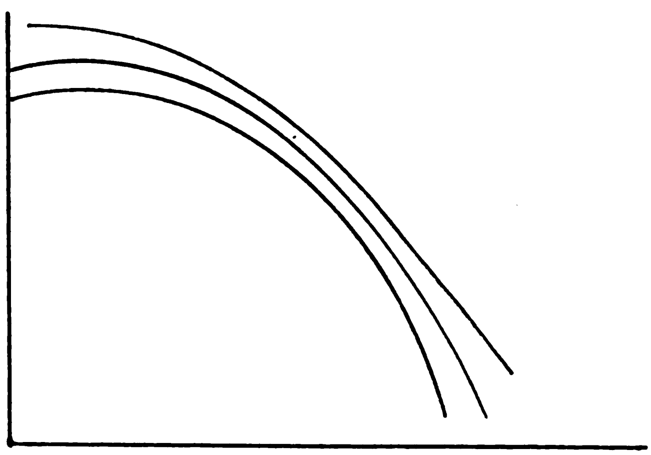

Figura 22. Representación gráfica de la curva y límites de confianza

Ejemplo 5. Regresión entre dos variables sujeto al modelo estadístico de la raíz cuadrada.

Modelo estadístico:

$$Y = b_0 + b_1X + b_2X^{0.5} + \varepsilon \qquad ; \qquad R = X^{0.5}$$

Cuadro 18. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo estadístico.

	$X = R^2$	Y	X^2	R	X^2	(RY)	(X.Y)
	1	8	1	1.00000	1.0000	8.0000	8
	2	10	4	1.41421	2.8284	14.4121	20
	3	9	9	1.73205	5.1962	15.5885	27
	4	8	16	2.00000	8.0000	16.0000	32
	5	7	25	2.23607	11.1803	15.6525	35
	6	6	36	2.44949	14.6969	14.6969	36
	7	6	49	2.64575	18.5203	15.8745	45
	8	3	64	2.82843	22.6274	8.4853	24
	9	2	81	3.00000	27.0000	6.0000	18
Σ:	45	59	285	19.30600	111.0495	114.4398	242
$\bar{X}$:	5	6.55	31.66	2.14511	12.3388	12.7155	26.88

Cálculo de los coeficientes de regresión (estimadores)

$$b_1 = \frac{(\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)/9)\cdot(\Sigma R^2-(\Sigma R)^2/9)-(\Sigma RY-(\Sigma R)(\Sigma Y)/9)\cdot(\Sigma XR-(\Sigma X-(\Sigma R)/9)}{(\Sigma R^2-(\Sigma R)^2/9)\cdot(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)-(\Sigma XR-(\Sigma X)(\Sigma R)/9)^2}$$

$$b_1 = \frac{(242-(45)(59)/9)\cdot(45-(19.306)^2/9)-(114.4398-(19.306)(59)/9)\cdot(111.0495-(45)(10.30/9)}{(45-(19.306)^2/9)(285-(45)^2/9)-(111.0495-(45)(19.306)/9)^2}$$

$$b_1 = \frac{(-53)\cdot(3.586485)-(-12.121755)\cdot(14.5195\ )}{(3.586485)(60)-(14.5195)^2} = \frac{-14.081883}{4.373219} = -3.22$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)(\Sigma RY-(\Sigma R)(\Sigma Y)/9)-(\Sigma XR+(\Sigma X)(\Sigma R)/9)(\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)/9)}{(\Sigma R^2-(\Sigma R)^2/9)(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)-(\Sigma XR-(\Sigma X)(\Sigma R)/9)^2}$$

$$b_2 = \frac{(60)(-12.121755)-(14.5195)(-53)}{(3.586485)(60)-(14.5195)} = \frac{42.2282}{4.37321}$$

$$b_2 = 9.65$$

$$b_0 = \bar{\bar{Y}} - b_1\bar{X} - b_2\bar{\bar{R}}$$

$$b_0 = 6.55555 - (-3.22)(5) - (9.6561)(2.14511)$$

$$b_0 = 1.94$$

Cuadro 19. Análisis de varianza de la regresión de la raíz cuadrada corresponde al cálculo aritmético de la metodología de hipótesis (fórmulas de trabajo).

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	$b_1(\Sigma XY-(\Sigma X).(\Sigma Y)/n+b_2(\Sigma R\ Y-(\Sigma R\ )(\Sigma Y)/n)$	2	SCR/GL	CMR/CME
Residual	Diferencia	3	SCE/GL	
Total	$\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n$			

Reemplazando valores tenemos:

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	53.6147	2	26.8073	61.68
Error	2.6075	3	0.4346	
Total	56.2222	5		

Coeficiente R^2:

$$R^2 = \frac{\text{S.C. Regresión}}{\text{S.C. total}} \cdot 100$$

$$R^2 = \frac{53.6147}{56.2222} \cdot 100 = 95.36$$

Errores estandar de los coeficientes b_1 y b_2.

$$s_{b_1} = s \sqrt{\frac{\Sigma R^2 - (\Sigma R)^2/9}{\text{Denominador}}} = (0.659234) \cdot \left(\sqrt{\frac{3.586485}{4.373219}} \right) = 0.596999$$

$$s_{b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/9}{\text{Denominador}}} = (0.659234) \cdot \left(\sqrt{\frac{60}{4.373219}} \right) = 2.441825$$

$$s_{b_1 b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma XR - (\Sigma X)(\Sigma R)/9}{\text{Denominador}}} = (0.659234) \cdot \left(\sqrt{\frac{14.5195}{4.373219}} \right) = 1.202298$$

Prueba de hipótesis: 't de student'

a) $H_0 : \beta_1 = 0$

$H_A : \beta_1 \neq 0$

b) $H_0 : \beta_2 = 0$

$H_A : \beta_2 \neq 0$

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} = \frac{-3.22}{0.59699} = 5.394$$

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{s_{b_2}} = \frac{9.65}{2.441825} = 3.952$$

Los efectos son altamente significativos, se interpreta como función de modelo de raíz cuadrática.

Punto estacionario de minimax

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$$

$$\hat{X} = \frac{0.5b_2^{\;2}}{b_1}$$

Representación gráfica

Para trazar la parábola, se utilizan los valores X_i y los Y_i estimados con base en los coeficientes del modelo.

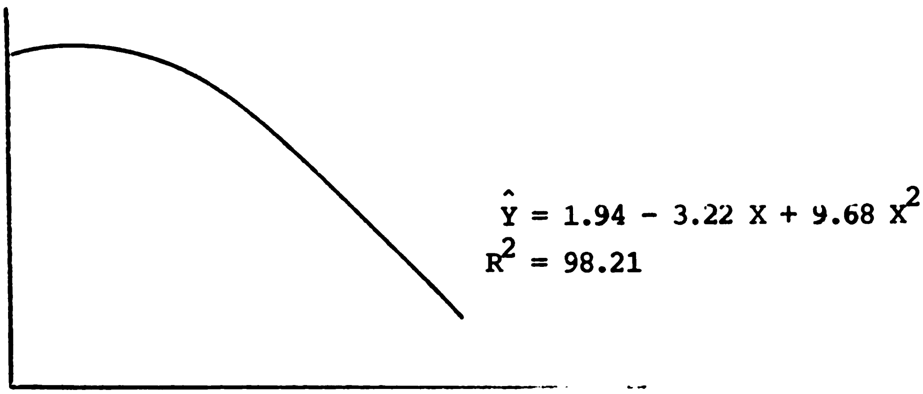

Figura 23. Regresión de la raíz cuadrada del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión.

Cuadro 20. Valores esperados o estimados ($\hat{Y}$)

	$(X - \bar{X})$	$(X - \bar{X})^2$	$(R - \bar{R})$	$(R - \bar{R})^2$	$(X-\bar{X})(R-\bar{R})^2$
	-4	16	-1.14511	1.311279	4.58044
	-3	9	-0.73090	0.534215	2.19270
	-2	4	-0.41306	0.170618	0.82612
	-1	1	-0.14511	0.021057	0.14511
	0	0	0.09096	0.008274	0.00000
	1	1	0.30438	0.092647	0.30438
	2	4	0.50064	0.250640	1.00128
	3	9	0.68332	0.466926	2.04996
	4	16	0.85489	0.730837	3.41956
Σ:	0	60			

Error estandar del estimado $\hat{Y}_i$

$$s_{\hat{Y}_i} = \sqrt{\frac{s^2}{n} + \mathrm{Var}(b_1)(X-\bar{X})^2 + \mathrm{Var}(b_2)(R-\bar{R})^2 + 2\mathrm{Cov}(b_1 b_2)(X-\bar{X})(R-\bar{R})}$$

$$= \sqrt{\frac{.43458964}{9} + (.3564)(16) + (5.9625)(1.3113) + 2(1.4428)(-4.58044)}$$

$$= 0.5927$$

Cuadro 21. Límites de confianza

$\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i - Y$	$s_{\hat{Y}_i}$	$(s_{\hat{Y}_i})(t)$	L.I	L.S
8.3779	-0.3779	0.5927	1.4503	6.93	9.83
9.1580	0.8419	0.3371	0.8248	8.33	9.98
9.0073	-0.0072	0.3274	0.8014	8.20	9.81
8.3646	-0.3746	0.3339	0.8171	7.56	9.19
7.434	-0.4341	0.3124	0.7645	6.67	8.20
6.275	-0.2750	0.2806	0.7351	5.59	6.96
4.950	1.0500	0.2811	0.6881	4.26	5.63
3.494	-0.4930	0.3530	0.8639	2.63	4.36
1.930	0.0700	0.4908	1.2011	0.73	3.13

Representación gráfica de la función

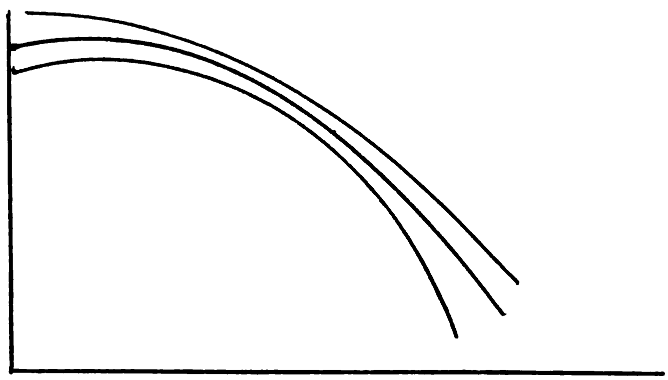

Figura 24. Función raíz cuadrática con límites de confianza

Ejemplo 6. Regresión entre dos variables sujeto al modelo estadístico gamma.

Modelo estadístico:

$$Y^* = b_0^* + b_1X + b_1X^* + e \qquad ; \qquad L = \ln X = X^*$$
$$M = \ln Y = Y^*$$

Cuadro 22. Datos tabulados para el cálculo de coeficientes de acuerdo al modelo estadístico.

	X	L	M	X^2	L^2	X.L	M.L	X.M
	1	0.00000	2.07944	1	0.00000	0.0000	0.00000	2.0794
	2	0.69315	2.30259	4	0.48045	1.3863	1.59603	4.6052
	3	1.09861	2.19722	9	1.20695	3.2958	2.41390	6.5917
	4	1.38629	2.07944	16	1.92181	5.5452	2.88272	8.3178
	5	1.60944	1.94591	25	2.59029	8.0472	3.13182	9.7296
	6	1.79176	1.79176	36	3.21040	10.7506	3.21040	10.7506
	7	1.94591	1.79176	49	3.78657	13.6214	3.48660	12.5423
	8	2.07944	1.09861	64	4.32408	16.6355	2.28450	8.7889
	9	2.19722	0.69315	81	4.82780	19.7750	1.52300	6.2383
Σ:	45	12.80182	15.97988	285	22.34835	79.0570	20.52897	69.6438
$\bar{X}$:	5	1.42242	1.77554	31.66	2.48315	8.7841	2.28100	7.7383

$$b_1 = \frac{(\Sigma XM-(\Sigma X)(\Sigma M)/9)\cdot(\Sigma L^2-(\Sigma L)^2/9)-(\Sigma LM-(\Sigma L)(\Sigma M)/9)\cdot(\Sigma LX-(\Sigma L)(\Sigma X)/9)}{(\Sigma L^2-(\Sigma L)^2/9)(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)-(\Sigma XL-(\Sigma X)(\Sigma L)/9)^2}$$

$$b_1 = \frac{(69.6438-(45)(15.9799)/9)(22.34835-(12.8018)^2/9)-(20.52897-(12.80182)}{(22.34835-(12.8018)^2/9)(285-(45)^2/9)-(79.057-(45)(12.80182)/9)^2}$$

$$\underline{(15.9799/9)(79.057-(12.8018)(45)/9)}$$

$$b_1 = \frac{(-10.2557)(4.138785) - (-2.20123)(15.048)}{(4.138785)(60) - (15.0479)^2} = \frac{-9.322248}{21.88781}$$

$$b_1 = -0.425911$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)(\Sigma LM-(\Sigma L)(\Sigma M)/9)-(\Sigma LX-(\Sigma L)(\Sigma X)/9)\ \ (\Sigma XM-(\Sigma X)(\Sigma M)/9)}{(\Sigma L^2-(\Sigma L)^2/9)(\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/9)-(\Sigma XL-(\Sigma X)(\Sigma L)/9)^2}$$

$$b_2 = \frac{(60)(-2.20123)-(15.0479)(-10.2557)}{(4.138785)(60)\ -\ (15.0479)^2} = \frac{22.2529}{21.8878}$$

$$b_2 = 1.01668$$

$$b_0 = \bar{M} - b_1\ \bar{X} - b_2\ \bar{L}$$

$$b_0 = 1.77554 - (.42591)(5) - (1.01668)(1.4224)$$

$$b_0 = 2.4589$$

Cuadro 23. Análisis de varianza de la regresión de segundo orden (cuadrático) corresponde al cálculo aritmético de la metodologia de hipotesis (fórmulas de trabajo).

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	$b_1(\Sigma XM-(\Sigma X)(\Sigma M)/n)\ +\ b_2(\Sigma LM-(\Sigma L)(\Sigma M)/n)$	2	SCR/GL	CMR/CME
Residual	Por diferencia	3	SCE/GL	
Total	$\Sigma M^2\ -\ (\Sigma M)^2/n$			

Reemplazando valores tenemos:

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F
Regresión	2.1302	2	1.0651	37.70
Residual	0.1695	6	0.02825	
Total	2.2996	8		

Decisión: Se rechaza la hipótesis nula por estar frente a un resultado altamente significativo.

Coeficiente R^2:

$$R^2 = \frac{\text{S.C. Regresión}}{\text{S.C. Total}} \cdot 100$$

$$R^2 = \frac{2.1301}{2.2996} \cdot 100 = 92.63$$

Error estandar de los coeficientes b_1 y b_2

$$s_{b_1} = s \sqrt{\frac{\Sigma L^2 - (\Sigma L)^2/9}{\text{Denominador}}} = (.168093) \cdot \left(\sqrt{\frac{4.138785}{21.88781}}\right) = 0.07309$$

$$s_{b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/9}{\text{Denominador}}} = (.168093) \cdot \left(\sqrt{\frac{60}{21.88781}}\right) = 0.278307$$

$$s_{b_1 b_2} = s \sqrt{\frac{\Sigma XL - (\Sigma X)(\Sigma L)/9}{\text{Denominador}}} = (.168093) \cdot \left(\sqrt{\frac{15.0479}{21.88781}}\right) = 0.139375$$

Prueba de hipótesis:

a) $H_0 : \beta_1 = 0$ b) $H_0 : \beta_2 = 0$

$H_A : \beta_1 \neq 0$ $H_A : \beta_2 \neq 0$

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} = \frac{-0.4259}{0.07309} = -5.827$$

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{s_{b_2}} = \frac{1.101668}{0.27830} = 3.653$$

Los efectos son altamente significativos, se interpreta como función modelo gamma.

Cuadro 24. Valores esperados o estimados $(\hat{Y})$

$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$(L-\bar{L})$	$(L-\bar{L})^2$	$(X-\bar{X})(L-\bar{L})$
-4	16	-1.42242	2.023280	5.68968
-3	9	-0.72927	0.531835	2.18781
-2	4	-0.32381	0.104853	0.64762
-1	1	-0.03613	0.001305	0.03613
0	0	0.18702	0.024976	0.00000
1	1	0.36934	0.136412	0.36934
2	4	0.52349	0.274042	1.04698
3	9	0.65702	0.431675	1.97106
4	16	0.77480	0.600315	3.09920
Σ: 0	60			

Error estandar del estimado $\hat{Y}_i$

$$s_{\hat{Y}_1} = \sqrt{\frac{s^2}{n} + Var(b_1)(X-\bar{X})^2 + Var(b_2)(L-\bar{L})^2 + 2Cov(b_1b_2)(X-\bar{X})(L-\bar{L})}$$

$$= \sqrt{\frac{.028255}{9} + (.005343)(16) + (.07774657)(2.02328) + 2(.019425)(5.6897)}$$

$$= 0.15596$$

Punto estacionario de minimax

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$$

$$\hat{X} = \frac{b_2}{b_1}$$

<u>Representación gráfica:</u>

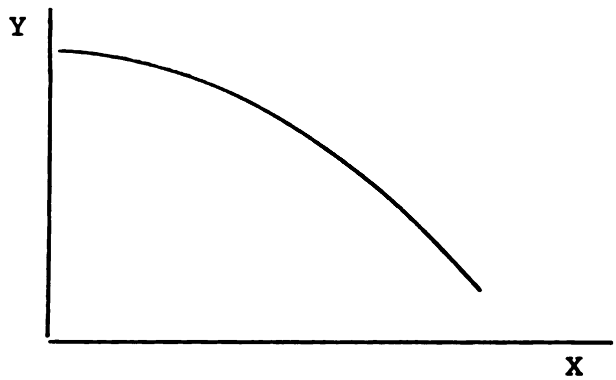

Figura 25. Regresión gamma del peso de larvas sobre los días transcurridos desde la eclosión

Cuadro 25. Límites de confianza

$\hat{Y}_i$	$(\hat{Y}_i - Y)$	$s_{\hat{Y}_i}$	$(s_{\hat{Y}_i})(t)$	L.I	L.S
2.033	0.0465	0.155960	0.381649	1.65	2.41
2.312	-0.0092	0.086218	0.210975	2.10	2.52
2.298	-0.1009	0.086463	0.211576	2.08	2.51
2.165	-0.0853	0.084737	0.207352	1.96	2.37
1.966	-0.0198	0.076478	0.187140	1.78	2.16
1.725	0.0666	0.068566	0.167780	1.56	1.89
1.456	0.3358	0.071184	0.174186	1.28	1.63
1.166	-0.0672	0.008974	0.220166	0.94	1.38
0.859	-0.1664	0.121389	0.297039	0.56	1.15

Representación gráfica de los resultados.

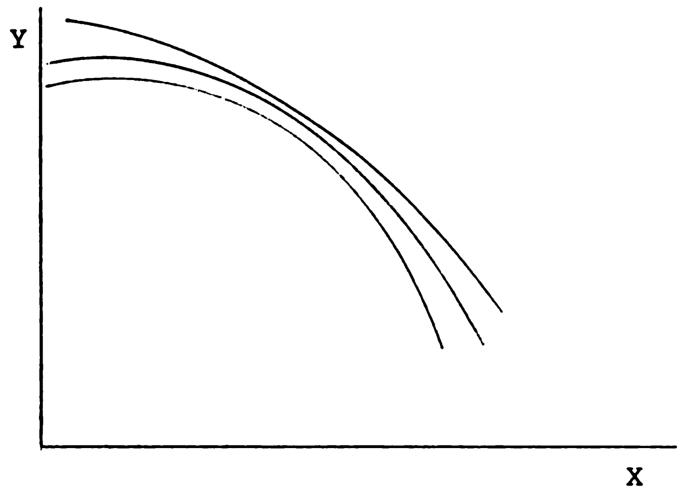

Figura 26 Función gamma con límites de confianza.

EDITORIAL IICA